MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 7
2.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. Es handelt sich bei
$$y' = x\,y - x\,y^2 = x \cdot \left(y - y^2\right)$$
um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y\,(1-y),$$
Die Funktion g ist sogar stetig differenzierbar, also ist die Bedingung ii) aus 2.8 erfüllt und es gibt nach 2.8 zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Zunächst liefern die beiden Nullstellen $y_1 = 0$ und $y_2 = 1$ von g die beiden konstanten Lösungen
$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 0, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_2(x) = 1,$$
und eine Lösung φ kann, wegen der Eindeutigkeit, keinen Punkt mit φ_1 und φ_2 gemeinsam haben (also $G_\varphi \cap G_{\varphi_1} = \varnothing$ und $G_\varphi \cap G_{\varphi_2} = \varnothing$); es gilt also entweder
$$\varphi > 1 \qquad \text{oder} \qquad 0 < \varphi < 1 \qquad \text{oder} \qquad \varphi < 0.$$

<u>1. Fall:</u> Wir betrachten die DGL
$$y' = xy(1-y), \quad y > 1,$$
trennen die Variablen und formen äquivalent um
$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy(1-y) \\
\int \frac{dy}{y(1-y)} &= \int x\,dx \\
\int \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{1-y}\right) dy &= \int x\,dx \qquad \text{Partialbruchzerlegung!} \\
\ln|y| - \ln|1-y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\
\ln \Big| \underbrace{\frac{y}{1-y}}_{<0,\ \text{da } y>1} \Big| &= \frac{1}{2}x^2 + c \\
-\frac{y}{1-y} &= e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\
y &= -(1-y) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\
y - ye^{\frac{1}{2}x^2+c} &= -e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\
y &= \frac{-e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{1 - e^{\frac{1}{2}x^2+c}} = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c} - 1}
\end{aligned}$$

Die maximalen Lösungen im 1. Fall sind also

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

wobei als maximale Definitionsbereiche in Frage kommen

$$D_\varphi = \begin{cases} \mathbb{R}, \quad \text{im Fall } c > 0 \\ ]-\infty, 0[\text{ oder }]0, \infty[, \quad \text{im Fall } c = 0 \\ ]-\infty, -\sqrt{-2c}[\text{ oder }]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[\text{ oder }]\sqrt{-2c}, \infty[, \quad \text{im Fall } c < 0. \end{cases}$$

Nur im Fall $D_\varphi = \mathbb{R}$ (bei $c > 0$), $D_\varphi =]-\infty, 0[$ oder $]0, \infty[$ (bei $c = 0$), $D_\varphi =]-\infty, -\sqrt{-2c}[$ oder $]\sqrt{-2c}, \infty[$ (bei $c < 0$) verläuft der Graph von φ oberhalb der Gerade $y = 1$,
[Begründung: In diesen Fällen ist $e^{\frac{1}{2}x^2+c} - 1 > 0$, also gilt für alle $x \in D_\varphi$, daß
$\varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1} > \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}} = 1$*]*
... und nur im Fall $c > 0$ ist der Definitionsbereich ganz $\mathbb{R}$.
Die maximalen Lösungen im 1. Fall mit $D_\varphi = \mathbb{R}$ sind also

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1} \qquad \text{mit } c > 0.$$

<u>2. Fall:</u> Wir betrachten die DGL

$$y' = xy(1-y), \quad 0 < y < 1,$$

trennen die Variablen und formen wie im 1. Fall äquivalent um

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= xy(1-y) \\ &\vdots \\ \ln|y| - \ln|1-y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\ \ln\Big|\underbrace{\frac{y}{1-y}}_{>0,\text{ da } 0<y<1}\Big| &= \frac{1}{2}x^2 + c \\ \frac{y}{1-y} &= e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\ y &= (1-y)\cdot e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\ y + ye^{\frac{1}{2}x^2+c} &= e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\ y &= \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{1+e^{\frac{1}{2}x^2+c}} \end{aligned}$$

Die maximalen Lösungen im 2. Fall sind also

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}+1} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}.$$

Diese sind alle auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

<u>3. Fall:</u> Wir betrachten die DGL

$$y' = xy(1-y), \quad y < 0,$$

trennen die Variablen und formen wie im 1. Fall äquivalent um

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= xy(1-y) \\
&\vdots \\
\ln|y| - \ln|1-y| &= \frac{1}{2}x^2 + c \qquad \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\
\ln\Bigg|\underbrace{\frac{y}{1-y}}_{<0,\text{ da } y<0}\Bigg| &= \frac{1}{2}x^2 + c \\
-\frac{y}{1-y} &= e^{\frac{1}{2}x^2+c} \\
&\vdots \\
y &= \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1}
\end{aligned}$$

Die maximalen Lösungen im 3. Fall sind also

$$\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1},$$

wobei für die in Frage kommenden maximalen Definitionsbereiche (siehe 1. Fall) nur mit $D_\varphi =]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$ (bei $c < 0$) sich Werte $\varphi(x) < 0$ ergeben, da $e^{\frac{1}{2}x^2+c} - 1 < 0$ für $x \in]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[$.

Die maximalen Lösungen im 3. Fall sind also

$$\varphi :]-\sqrt{-2c}, \sqrt{-2c}[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1} \qquad \text{mit } c < 0.$$

Damit gibt es im 3. Fall keine Lösungen, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind.

<u>Zusammenfassung:</u>

Alle maximalen Lösungen mit $D_\varphi = \mathbb{R}$ sind:

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1} \qquad \text{mit } c > 0,$$

$$\left[\text{ Hier ist } \quad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}-1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1-\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}} = 1 \right]$$

sowie

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}+1} \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R},$$

$$\left[\text{ Hier ist } \quad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{e^{\frac{1}{2}x^2+c}}} = 1 \right]$$

sowie

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 1,$$

$$\left[\text{ Hier ist } \quad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) = 1 \right]$$

und

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0,$$
$$\left[\text{ Hier ist } \quad \lim_{x\to\pm\infty} \varphi(x) \ = 0. \ \right]$$

2. Die vorliegende DGL kann aufgefaßt werden als eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(y) = y - 1.$$

Die Funktion g ist stetig differenzierbar, also ist die Bedingung ii) aus 2.8 erfüllt und es gibt nach 2.8 zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x_0) = y_0$. Die Nullstelle $y_1 = 1$ von g liefert dabei die konstante Lösung

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi_1(x) = 1,$$

und jede weitere Lösung $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ von $(*)$ kann – wegen der Eindeutigkeit – keinen Punkt mit φ_1 gemeinsam haben, ihr Graph G_φ verläuft also komplett oberhalb oder komplett unterhalb der Geraden $y = 1$, es gilt also entweder

$$\varphi > 1 \qquad \text{oder} \qquad \varphi < 1.$$

1. Fall: Wir betrachten die DGL

$$y' = \frac{y-1}{x^2+1}, \quad y < 1. \qquad (*_1)$$

Für deren Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ gilt $\varphi(x) < 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{<0}}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} < 0$$

für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen aber streng monoton fallend.

2. Fall: Wir betrachten die DGL

$$y' = \frac{y-1}{x^2+1}, \quad y > 1. \qquad (*_2)$$

Für deren Lösungen $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$ gilt $\varphi(x) > 1$ und damit unter Verwendung der gegebenen Differentialgleichung

$$\varphi'(x) = \frac{\overbrace{\varphi(x) - 1}^{>0}}{\underbrace{x^2+1}_{>0}} > 0$$

für alle $x \in D_\varphi$; folglich sind diese Lösungen streng monoton wachsend.
Wir lösen nun die DGL $(*_2)$ durch Trennung der Variablen:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{y-1}{x^2+1} \\
\int \frac{1}{y-1}\,dy &= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx \\
\ln|y-1| &= \arctan x + c && \text{(für eine Konstante } c \in \mathbb{R}) \\
\ln(y-1) &= \arctan x + c && \text{(beachte, daß } y > 1, \text{ also } y - 1 > 0) \\
y &= e^{\arctan x + c} + 1
\end{aligned}$$

Es ergeben sich also die streng monoton wachsenden Lösungsfunktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = e^{\arctan x + c} + 1,$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

Alternativ kann man die DGL

$$y' = \frac{y-1}{x^2+1} = \underbrace{\frac{1}{x^2+1}}_{a(x)} \cdot y \underbrace{- \frac{1}{x^2+1}}_{(b(x)} \qquad (*)$$

auch als inhomogene lineare DGL 1. Ordnung auffassen, wobei $\varphi_p(x) = 1, x \in \mathbb{R}$, eine partikuläre Lösung ist. Die allgenmeine Lösung der homogenen DGL

$$y' = \frac{y-1}{x^2+1} = \frac{1}{x^2+1} \cdot y \qquad (*_0)$$

ist

$$\varphi_c(x) = ce^{A(x)} = c\, e^{\arctan x}, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Dann ist die allgemeine Lösung von $(*)$ ist dann

$$\varphi(x) = c\, e^{\arctan x} + 1, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Da $x \longmapsto e^{\arctan x}, x \in \mathbb{R}$, streng monoton wachsend, ist φ genau für $c > 0$ eine streng monoton wachsende Lösungsfunktion.

3. a) Ist $\varphi : D_\varphi \longrightarrow \mathbb{R}$ ein Lösung der Differentialgleichung

$$y' = \sqrt{y}, \quad y \geq 0, \qquad (*)$$

so ist $\varphi'(x) = \sqrt{\varphi(x)} \geq 0$, also, da $D_\varphi \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, ist φ monoton wachsend.

b) Es handelt sich um eine Differentialgleichung $y' = h(x) \cdot g(y)$ mit getrennten Variablen mit den stetigen Funktionen

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = 1, \quad \text{und} \quad g : [0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad g(y) = \sqrt{y}.$$

Man beachte, daß hier die Bedingungen i) (g nicht nullstellenfrei) und ii) (g nicht stetig differenzierbar) aus 2.8 **nicht** erfüllt sind, eine eindeutige Lösbarkeit des AWP ist also nicht garantiert (und hier auch nicht gegeben).
Zunächst liefert die Nullstelle $y = 0$ von g die konstante Lösung

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0,$$

die wegen $\varphi(0) = 0$ auch das Anfangswertproblem löst;
Wir betrachten nun die Differentialgleichung

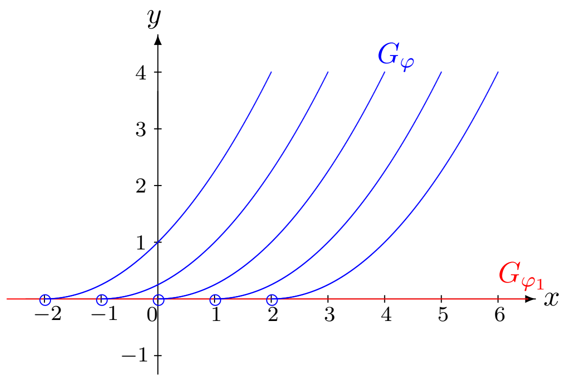
$$y' = \sqrt{y}, \;\; y > 0, \qquad (*_1)$$

trennen die Variablen und formen äquivalent um:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y' = \sqrt{y} \\ \int y^{-\frac{1}{2}}\, dy &= \int 1\, dx \\ 2\, y^{\frac{1}{2}} &= x + c \qquad \text{mit einer Konstanten } c \in \mathbb{R} \qquad (+) \\ y &= \left(\frac{x+c}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

Wegen $y > 0$ ist auch $\sqrt{y} > 0$, also muß wegen $(+)$ gelten $x + c > 0$, also $x > -c$. Damit ist die allgemeine Lösung von $(*_1)$

$$\varphi :]-c, \infty[\to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \left(\frac{x+c}{2}\right)^2.$$



Diese Lösungen φ sind jedoch keine maximalen Lösungen von $(*)$, da sie noch durch $\varphi(x) = 0$ für $x \leq -c$ zu einer differenzierbaren Funktion (wieder mit φ bezeichnet) $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ fortgesetzt werden können. Die allgemeine Lösung von $(*)$ besteht also aus den Funktionen

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = 0,$$

und

$$\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ für } x \leq -c \\ \left(\frac{x+c}{2}\right)^2 & , \text{ für } x > -c \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{R}$. Dabei sind alle Funktionen mit $c \leq -1$ Lösungen des gestellten AWP.

4. a) Die DGL hat die Form

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = b(x) \qquad (*)$$

mit $a_0, a_1 \in \mathbb{R}$ und einer stetigen Funktion $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Da ψ_1, ψ_2, ψ_3 Lösungen von $(*)$ sind, sind nach der Bemerkung nach 2.13 der Vorlesung

$$\varphi_1 := \psi_1 - \psi_3 \qquad \text{und} \qquad \varphi_2 := -(\psi_2 - \psi_3)$$

Lösungen der homogenen DGL

$$y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (*_0)$$

Die Funktionen

$$\varphi_1(x) = e^x, \ x \in \mathbb{R}, \qquad \text{und} \qquad \varphi_2(x) = e^{-x}, \ x \in \mathbb{R},$$

sind zudem linear unabhängig, also ist, da es sich um eine inhomogene lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten handelt, φ_1, φ_2 ein Fundamentalsystem von $(*_0)$. Damit lautet die allgemeine Lösung von $(*_0)$

$$\varphi_{c_1,c_2}(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, und die allgemeine Lösung von $(*)$ dann (mit ψ_3 als einer partikulären Lösung)

$$\varphi(x) = \varphi_{c_1,c_2}(x) + \psi_3(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \psi_3(x) \ = \ c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

b) Es ist mit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= c_1 e^x + c_2 e^{-x} + x \\ \varphi'(x) &= c_1 e^x - c_2 e^{-x} + 1, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 \quad &\iff c_1 + c_2 - 0 = 0 \\ \varphi'(0) = 5 \quad &\iff c_1 - c_2 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Dieses lineare Gleichungssystem in c_1 und c_2 hat die eindeutig bestimmte Lösung

$$c_1 = 2, \qquad c_2 = -2.$$

Also ist

$$\varphi(x) = 2e^x - 2e^{-x} + x, \quad x \in \mathbb{R},$$

die Lösung des gestellten AWP.